



● محمدتقی طاهری تنجانی

در کلاس درس آقای رهنما

استدلال استقرایی

فاصله کمی از هم، ایستاده می‌چیدیم و بعد از چیدن آجرها، با انداختن آجر اول روی آجر دوم به تماشا می‌نشستیم و افتادن بقیه آجرها و حرکت موج‌وار آن منظره‌ای دیدنی به‌وجود می‌آورد. ما از این کار لذت می‌بردیم.

آقای رهنما: آفرین. روش استقرا مشابهِت زیادی به بازی دومینو دارد. حالا که ذهنتان آماده شد قضیه استقرای ریاضی را مطرح می‌کنم: «فرض کنید $p(n)$ گزاره‌ای در حوزه عددهای طبیعی و دارای دو ویژگی زیر باشد:

الف) $p(1)$ درست باشد (یعنی به ازای $n=1$ گزاره $p(1)$ درست باشد)
ب) اگر $p(k)$ درست باشد، نتیجه شود $p(k+1)$ نیز درست است.

در این صورت گزاره $p(n)$ برای هر عدد طبیعی n درست خواهد بود.»

حسینی: آقا اجازه! چطور ما می‌توانیم افتادن آجرها را در بازی دومینو با قضیه استقرای ریاضی شبیه‌سازی کنیم؟

آقای رهنما: در حقیقت $p(n)$ می‌شود افتادن آجرها روی هم و $p(1)$ هم افتادن آجر اولی روی دومی و شرط (ب) قضیه استقرای ریاضی در اینجا این است که اگر آجر k افتاد، بپذیریم آجر $k+1$ هم می‌افتد. نکته مهم همین اطمینان از افتادن آجر $k+1$ است که با در نظر گرفتن شرایط مسئله اتفاق می‌افتد. در حقیقت این افتادن آجرها از آجر اول به آجرهای بعدی سرایت می‌کند.

مصطفوی: آقا در مورد طلایی بودن حلقه‌های زنجیر که مثال زدید هم همین‌طور است؟

آقای رهنما: بله کاملاً شبیه هم هستند. در آنجا خاصیت $p(n)$ همان طلایی بودن حلقه‌هاست و $p(1)$ طلایی بودن حلقه اول است و شرط (ب)

آقای رهنما: بچه‌ها توجه کنید فرض کردیم تعداد نامحدودی حلقه داریم، پس نمی‌توانیم رنگ همه حلقه‌ها را بررسی کنیم! حالا قبل از آنکه راهی اساسی را بیان کنم که در حقیقت همان درس امروزمان است، سؤال دیگری را مطرح می‌کنم. فرض کنید ۱۰ نفر که سرما خورده‌اند با خوردن شورها سرماخوردگی‌شان بر طرف شود. آیا می‌توان نتیجه گرفت نفر یازدهم هم که سرما خورده است با خوردن شورها بهبودی می‌یابد؟

حسینی: وقتی ۱۰ نفر خوب شده‌اند، طبیعی است انتظار داشته باشیم نفر یازدهم هم خوب شود.

آقای رهنما: و اگر خوب نشد در استدلالمان دچار مشکل شده‌ایم. به این کار ما که تعدادی رخداد مشابه را تعمیم می‌دهیم «استدلال استقرایی» می‌گویند؛ استدلالی که از جزء به کل می‌رسیم. در حقیقت ما دنبال قاعده‌ای هستیم که مطابق آن بتوانیم برای یک خاصیت که در مورد تعدادی حالت برقرار است، نتیجه کلی بگیریم. در زندگی روزمره ما از استقرای تجربی زیاد استفاده می‌کنیم. مثلاً وقتی در یک روستا تعدادی خانه با سقف گنبدی می‌بینیم، حکم می‌کنیم که همه خانه‌های روستا گنبدی شکل هستند. این یک استقرای تجربی است. واضح است که می‌تواند درست نباشد. روش استقرای ریاضی یک جوری شبیه بازی دومینو است. کسی تا به حال دومینویی دیده یا بازی کرده است؟

حسینی: آقا ما که بچه بودیم کنار منزلمان ساختمانی می‌ساختند و ما آجرها را با

آقای رهنما: (دبیر ریاضی) وارد کلاس شد. چیزی که جلب توجه می‌کرد یک زنجیر طلایی بود که بخشی از آن داخل مشت او و چند حلقه آن بیرون مشتش بود. رو به دانش‌آموزان کرد و گفت: «بچه‌ها چیزی که در مشت من است یک زنجیر است. شما تعدادی از حلقه‌های آن را که از مشت بیرون است می‌بینید. درس امروز ما بی‌رابطه با این زنجیر نیست. چطور می‌توانیم ثابت کنیم همه حلقه‌های این زنجیر طلایی رنگ است؟ بچه‌ها: (یک‌صدا) خب معلوم است، بقیه زنجیر هم مثل حلقه‌های بیرونی از یک رنگ‌اند.

آقای رهنما: اشتباه نکنید! شما از رنگ حلقه‌های زنجیر داخل مشت خبر ندارید.

مصطفوی: آقا از حلقه اول چک می‌کنیم. هر حلقه را از نظر می‌گذاریم تا آخرین حلقه. اگر همه طلایی رنگ بودند، حکم بر طلایی بودن همه حلقه‌های زنجیر می‌کنیم.

آقای رهنما: ضمن آنکه مشتش را باز می‌کرد و زنجیر را به دانش‌آموزان نشان می‌داد گفت: «من با نظر آقای مصطفوی موافقم و همان‌طور که مشاهده می‌کنید همه حلقه‌های زنجیر طلایی‌اند. حالا بیا بیاید فرض کنید من زنجیری دارم که بی‌شمار حلقه دارد و ادعا می‌کنم همه حلقه‌هایش طلایی‌اند. چگونه می‌شود ادعای مرا ثابت کرد؟»

احمدی: خب از حلقه اول شروع می‌کنیم و حلقه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم که آیا طلایی هستند یا نه. اگر به اولین حلقه غیرطلایی رسیدیم، حکم را رد می‌کنیم.

حسینی: و اگر نرسیدیم؟!
احمدی: ادامه می‌دهیم!



درستی حکم روشن است؛ چرا؟

پچه‌ها: چون هر عدد با خودش برابر است!
آقای رهنما: فرض کنیم حکم برای هر مجموعه که دارای k عضو باشد درست باشد و فرض کنیم مجموعه مورد نظر دارای عضوهای a_1 و a_2 و ... و a_k باشد. بنا به فرض استقرا داریم: $a_1 = a_2 = \dots = a_k$. حالا مجموعه‌ای شامل $k+1$ عضو a_1 و a_2 و ... و a_k و a_{k+1} را در نظر می‌گیریم. و مجموعه $\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ هم که دارای k عضو است را در نظر می‌گیریم. بنا به فرض استقرا این مجموعه k عضوی باید همه عضوهایش برابر باشند؛ یعنی: $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1}$.
داریم: $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1}$.

به این ترتیب ثابت شد با فرض برابر بودن عضوهای هر مجموعه k عضوی، همه عضوهای مجموعه $k+1$ عضوی هم با یکدیگر برابرند! استدلال به ظاهر بی‌نقص است. آیا می‌توانید اشتباه استدلال را پیدا کنید؟

مصطفوی: آقا اجازه مشکل خاصی نمی‌بینیم. دو شرط قضیه استقرای ریاضی را تحقیق کردیم. هم $p(1)$ درست بود و هم از درستی $p(k)$ به درستی $p(k+1)$ رسیدیم. ولی ما می‌دانیم در هر مجموعه محدود، همه عضوهایش نمی‌توانند با هم برابر باشند. باید اشکالی در استدلال وجود داشته باشد که ما به آن توجه نداریم!

آقای رهنما: نکته همین جاست. گام استقرایی گذرا از k به $k+1$ را تنها برای $k \geq 2$ می‌توان نوشت. با استدلالی که کردیم، از $n=1$ به $n=2$ نمی‌توان عبور کرد. وقتی از $n=1$ صحبت می‌کنیم تنها با یک عدد سروکار داریم و در نتیجه مفهوم مقایسه معنای خودش را از دست می‌دهد. در حقیقت حلقه نخست مبنای استقرا $n=2$ است و نه $n=1$. واضح است که اگر از $n=2$ آغاز کنیم می‌توان به نتیجه مورد نظر رسید.

دیدید استدلال استقرایی گاهی دردسرساز می‌شود. باید شرایط استفاده از آن همواره برقرار باشد تا بتوان از آن استفاده کرد. فرصت ما محدود است و نمی‌توانیم به ریزه‌کاری‌های بیشتری بپردازیم. برای جلسه بعد چند سؤال خدمتان تقدیم می‌شود. بکوشید آن‌ها را حل کنید تا با استدلال استقرایی بیشتر آشنا شوید. مبصر کلاس برگه‌های تمرین را توزیع کنید.



برای دیدن تمرین‌ها
رمزبانه را پویش کنید.

در سمت چپ عدد ۱ داریم و سمت راست هم داریم: $1^2 = 1$. پس $p(1)$ برقرار است. حالا یک نفر بیاید و ضمن نوشتن فرض و حکم استقرا آن را ثابت کند.»

موسوی: آقا اجازه دهید من انجام بدهم.
آقای رهنما: بفرمایید.

موسوی پای تابلو می‌آید و می‌نویسد:
$$k^2 = (1+3+5+\dots+(2k-1))$$

$$p(k): 1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2$$

$$p(k+1): 1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1) = (k+1)^2$$

برای اثبات حکم از سمت چپ شروع می‌کنیم و به سمت راست می‌رسیم:

بنا به فرض استقرا
$$1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2$$

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

آقای رهنما: آفرین. در حقیقت با استفاده از شرط‌های الف و ب در قضیه استقرای ریاضی، حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار شد. حالا می‌توانید بگویید مجموع عددهای فرد طبیعی از یک تا 1403 چند می‌شود؟

احمدی: آقا (1403^2) ؛ طبق همین مسئله‌ای که ثابت شد.

آقای رهنما: مگر تعداد عددهای فرد طبیعی از یک تا 1403 برابر 1403 می‌شود؟! در حقیقت داریم:

$$1+3+5+\dots+(2(702)-1) = (702)^2$$

حسینی: آقا ما هر چه مسئله داریم که می‌خواهیم ثابت کنیم، می‌شود از همین قضیه استقرای ریاضی ثابت کنیم؟!

آقای رهنما: نه جانم به این سادگی‌ها نیست! اول، برای مسئله‌هایی می‌توان به سراغ قضیه استقرای ریاضی رفت که در آن‌ها کمیت مطرح باشد نه کیفیت. وقتی نتوانیم درباره پدیده‌ای تعریف کمیتی دقیقی ارائه کنیم، بی‌شک برای بررسی آن نمی‌توان به سراغ استقرای ریاضی رفت.

دوم، تنها برای عددهای طبیعی می‌توان از این روش استفاده کرد. سوم، گام اول استقرا با وجود سهولت اثبات آن، گاهی برقرار نیست، ولی به ظاهر گام دوم برقرار است و نتیجه وحشتناکی گرفته می‌شود. برایتان مثالی می‌زنم. خوب توجه کنید

آیا می‌توان ثابت کرد در هر مجموعه که تعداد عضوهای آن معلوم باشد، همه عضوهای مجموعه با هم برابرند؟! برای $n=1$

در قضیه این می‌شود که با فرض اینکه k امین حلقه طلایی باشد بتوانیم نتیجه بگیریم حلقه $k+1$ ام نیز طلایی است.

پچه‌ها: چه جالب!

آقای رهنما: حالا برایتان از ریاضیات مثالی می‌زنم. می‌خواهیم نشان دهیم مجموع عددهای طبیعی از یک تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ می‌شود؛ یعنی:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

حالا شرایط قضیه را بررسی کنیم: $p(n)$ همین رابطه است که می‌خواهیم ثابت کنیم. $p(1)$ هم که واضح است؛ سمت چپ برابر ۱ و سمت راست هم $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ می‌شود که برقراری آن مشخص است. حالا بفرمایید فرض و حکم استقرا که در قسمت (ب) قضیه مطرح شده کدام است؟

حسینی: باید به ازای $n=k$ فرض کنیم گزاره‌ما برقرار است و به ازای $n=k+1$ ثابت کنیم $p(n)$ برقرار می‌شود.

آقای رهنما: آقای حسینی درست بیان کردید. پای تابلو بیایید و علاوه بر مشخص کردن فرض و حکم استقرا مسئله را ثابت کنید.

حسینی: پای تابلو می‌آید و می‌نویسد:

$$p(k): 1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$p(k+1): 1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

آقای رهنما: آفرین حالا از سمت چپ حکم، با استفاده از فرض استقرا، به سمت راست حکم مسئله برس.

حسینی: روی تابلو می‌نویسد:

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

بنا به فرض استقرا

آقای رهنما: حالا اگر در سمت راست از $(k+1)$ فاکتور بگیریم حکم استقرا ثابت می‌شود.

حسینی:
$$= (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = (k+1) \left(\frac{k+2}{2} \right)$$

آقای رهنما: حالا ثابت کردیم که استقرا برقرار است. پس نتیجه می‌گیریم طبق قضیه استقرای ریاضی این حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است. دیدید چقدر کار ساده‌ای بود!

حالا شما خودتان ثابت کنید مجموع n عدد فرد طبیعی با شروع از یک برابر مربع تعداد جمله‌ها می‌شود؛ یعنی: $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

سیس به دانش‌آموزان راهنمایی‌های لازم را گوشزد کرد. پس از چند دقیقه رو به دانش‌آموزان کرد و گفت: «حتماً همگی موفق به اثبات شدید. حالا با هم اثبات مسئله را مرور می‌کنیم: خب شرط (الف) برقراری $p(1)$ است. زیرا واضح است